Pablo Amster

APUNTES MATEMÁTICOS PARA LEER A LACAN

1. Topología

Letra Viva

Capítulo 1

Generalidades

¿Qué es topología?

En la introducción hemos partido de un anuncio hecho por Lacan en el Seminario IX, antes de introducir los rudimentos de esta rama de la Matemática que ha cautivado a los espíritus más notables, desde pensadores y filósofos hasta artistas como Escher, o el escritor A. J. Deutch, autor de aquel célebre cuento de ciencia ficción más tarde convertido en película argentina: *A subway named Moebius*.

Dijimos, informalmente, que se trata de una geometría débil, no métrica, y que algunos autores la han denominado –sin mucho rigor– "geometría del caucho".

En su intento por "desimaginarizar", Lacan se interesó por diversas cuestiones que conciernen a la topología, comenzando por los grafos para pasar por las superficies y llegar finalmente a los nudos. Todos estos términos participan, de una manera o de otra, en la topología. Pero aún queda sin respuesta una pregunta más básica: ¿qué es topología?

El nervio, la pimienta y la sal

Cuando Lacan presenta al toro en el Seminario IX, no deja lugar a dudas de que el objeto que se dispone a estudiar proviene de la geometría:

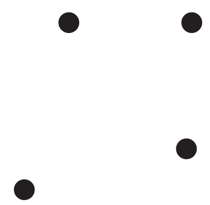
Lo que quería subrayar es que el toro, hablo en el sentido geométrico estricto del término, es decir que según la definición geométrica es una superficie de revolución, la superficie de revolución de ese círculo alrededor de un eje, y lo que se engendra es una superficie cerrada.

No obstante, poco después explica:

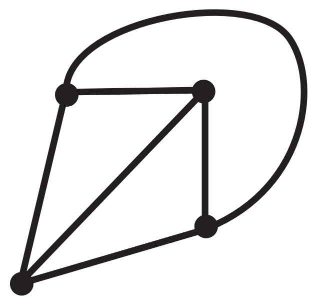
Pues, finalmente, si les ruego aquí referirse expresamente a la superficie, es por las propiedades topológicas que estará en medida de mostrarles. [...] De esas propiedades topológicas ustedes van a ver el nervio, la pimienta y la sal.

Pero entonces: ¿puede un objeto geométrico ser estudiado topológicamente? ¿Qué son, en suma, las "propiedades topológicas"?

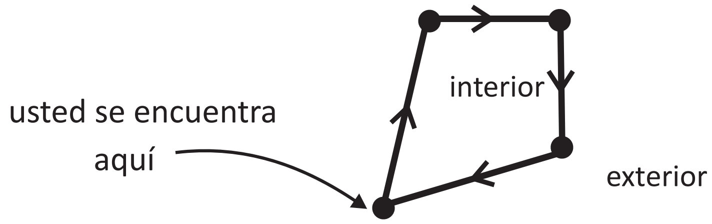
Vamos a comenzar con una situación sencilla; consideremos cuatro puntos distintos en el plano, por ejemplo:



Entonces podemos preguntarnos: ¿es posible unirlos dos a dos (es decir, a cada uno de ellos con cada uno de los otros) mediante líneas que no se crucen entre sí? La respuesta es inmediata, un simple intento alcanza para mostrar que tal cosa siempre puede hacerse:

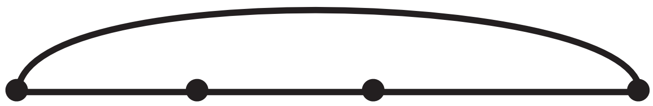


¿Por qué decimos que esta "mostración" es suficiente? La intuición nos dice que no importa cómo ubiquemos a los puntos, siempre podremos, en primer lugar, efectuar una suerte de "paseo" que comience en cualquiera de ellos y recorra todos los puntos sin que los trayectos se crucen, hasta volver al origen. Es lo que se denomina un *circuito simple*; vale decir, un camino cerrado sin auto-intersecciones. El plano queda así separado en dos regiones, una *interior* y la otra *exterior*:

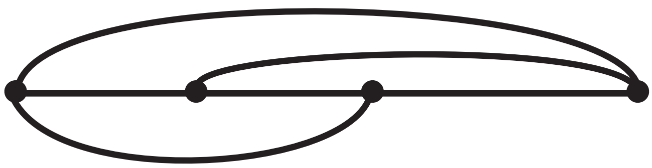


un paseo por el plano

Lo que resta es fácil de adivinar: de los vértices opuestos que aún quedan por unir, un par se conecta mediante una línea interior al cuadrilátero, y el par que falta lo hace por medio de un recorrido exterior. Si tres de los puntos (o los cuatro) se encuentran alineados, la figura resultante no va a ser un cuadrilátero demasiado ortodoxo, aunque el razonamiento sigue valiendo siempre que dejemos en claro qué entendemos por "vértices opuestos":

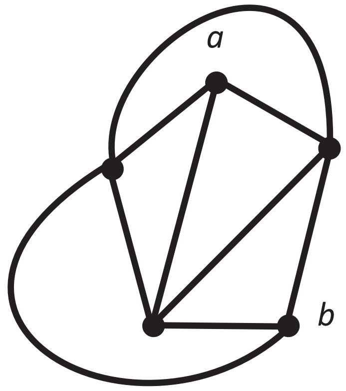


un cuadrilátero heterodoxo



Unión de vértices (heterodoxamente) opuestos

Podemos darnos por satisfechos con la respuesta obtenida, y pasar a la próxima pregunta: ¿qué ocurre cuando se trata de *cinco* puntos? Ahora nuestros primeros intentos parecen fracasar:



¿Cómo unir a con b?

Y bien: a fuerza de fracasos, es nuevamente nuestra intuición la que nos dice que no hay manera de unir esos puntos. Según parece, en cualquier caso queda un par de puntos que es imposible conectar sin pasar sobre alguna línea previa.

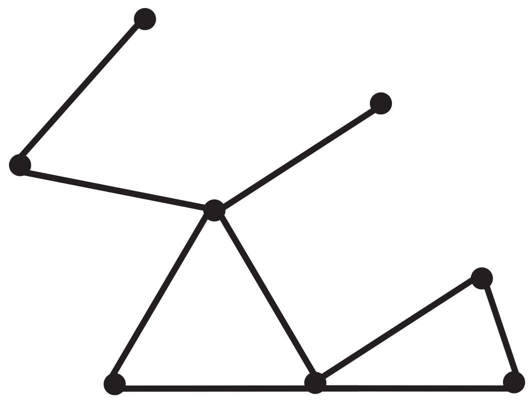
Sin embargo, esta respuesta está lejos de darnos las mismas satisfacciones que obtuvimos en el caso anterior. Podemos observar que la situación ahora es bastante diferente: cuando se trata de probar que la unión es posible, alcanza con encontrar una manera de hacerlo; en cambio, una demostración de su imposibilidad requiere un argumento que esté a salvo de todo intento ulterior. Dicho de otra manera: ¿quién nos garantiza que acaso ensayando con la paciencia o el ingenio suficientes no habremos de dar en algún momento con alguna solución *mágica*? Después de todo, cabría imaginar que existe en el plano alguna combinación, algún atajo que no hemos tomado...

Es aquí en donde comienzan a formularse los primeros esbozos de lo que podemos llamar una "teoría". Desde el punto de vista del lenguaje, la propiedad de los cinco puntos se expresa de un modo sorprendentemente conciso: basta decir que *el grafo* K_5 *no es plano*.

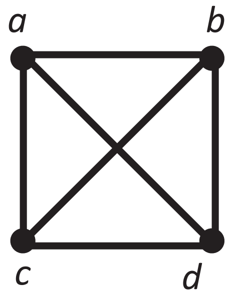
Podríamos rechazar esta última afirmación alegando que no es más que una manera de hablar, aunque situarnos en la *teoría de grafos* nos permite hacer uso de herramientas muy efectivas a la hora de llevar a cabo ciertas demostraciones.

Es oportuno recordar que Lacan se valió de algunas ideas de esta teoría, en especial en la primera etapa de su enseñanza, de modo que vale la pena dedicar algunos párrafos a ella.

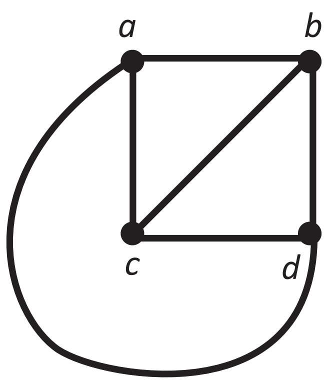
Intuitivamente, un grafo consiste en una colección finita de puntos y líneas, denominados respectivamente *vértices* y *aristas*, de manera tal que cada arista tenga exactamente dos vértices como extremos.



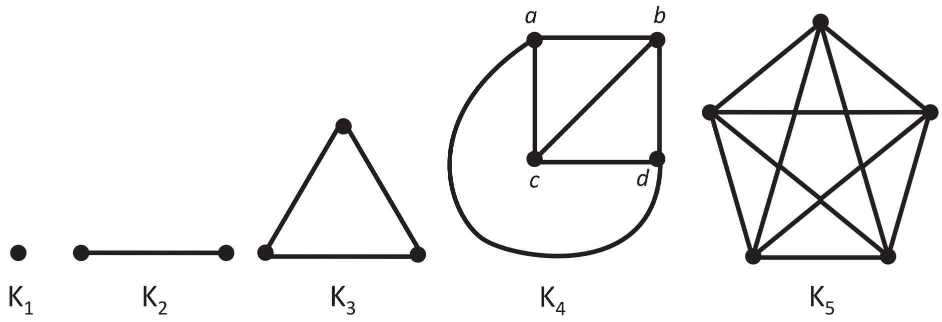
Todo grafo puede representarse de un modo sencillo mediante un dibujo en el plano; no obstante, sólo se denomina *grafos planos* a aquellos que pueden trazarse evitando que las líneas se superpongan. Por ejemplo, el siguiente es un grafo plano a pesar de que presenta un cruce,



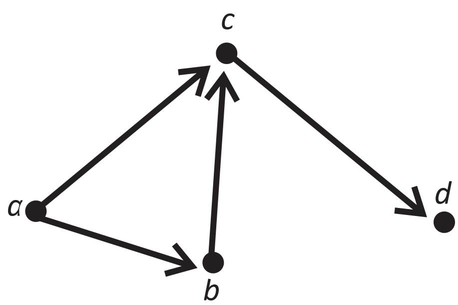
ya que admite esta otra configuración:



Una clase particular de grafos es la de los denominados *completos*, en donde cada uno de los vértices se conecta con cada uno de los otros, de modo que no se pueden agregar más aristas. Al grafo completo de n vértices se lo suele denotar K_n:

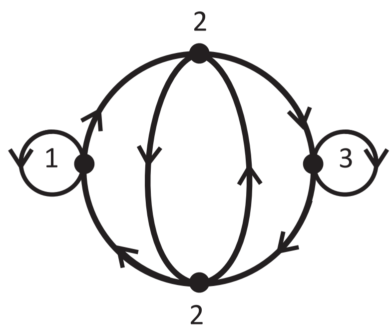


También se puede asignar a cada arista una *orientación*, obteniéndose un grafo orientado o *dirigido*, por ejemplo:



En la definición usual de grafo suele ponerse como condición que las aristas no tengan sus dos extremos iguales (es decir, que no haya "bucles"), y que dos aristas diferentes tengan siempre algún vértice diferente.

Sin embargo, a veces resulta de interés considerar grafos que no cumplen las condiciones anteriores; son los denominados multi-grafos, como el que presenta Lacan en el Seminario sobre "La carta robada":



En este caso, hay que mencionar además un pequeño ardid que lo transforma en un grafo que no es como los demás. Aparecen, en efecto, dos vértices que son distintos pero llevan el mismo nombre. Esto no debería hacerse, aunque Lacan se vale de ello para expresar, en sintonía con Rimbaud: *Yo es Otro*. También propone un juego, resumido en la equívoca traducción de André Gide de la locución latina *Numero Deus impare gaudet*, en la que un irreverente reemplazo de Dios por Dos arroja el resultado: *El número dos se regocija de ser impar*.[5]

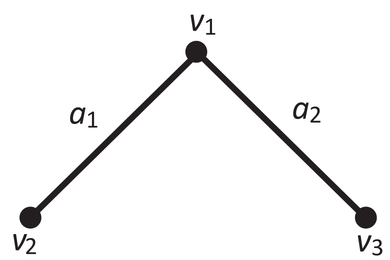
Formalmente, un grafo se puede describir como una terna G = (V, A, φ), en donde *V* (vértices) y *A* (aristas) son conjuntos finitos, y φ es una función que hace corresponder a cada elemento de *A* un par de elementos de *V*. Por ejemplo, dados

$$V = \{ v_1, v_2, v_3 \}, A = \{ a_1, a_2 \},$$

y la función φ definida por

$$\varphi (a_1) = \{ v_1, v_2 \}, \varphi (a_2) = \{ v_1, v_3 \}$$

se obtiene el grafo:



Volviendo al tema, vamos a enunciar un teorema que resulta de gran importancia en esta teoría: se trata de la llamada *fórmula de Euler*, que asegura que en todo grafo plano se verifica la igualdad

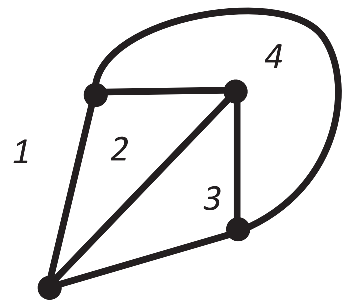
$$V + C - A = 2,$$

en donde *V* es el número de vértices, *A* el número de aristas y *C*

5. Vale la pena mencionar una notable referencia anterior al verso de Virgilio. Se trata, una vez más, de Leibniz, quien recrea el regocijo divino en *De Vera Proportione Circuli ad Quadratum Circumscriptum in Numeris Rationalibus* de 1682. Allí muestra (aunque en realidad no *demuestra*) que vale la siguiente fórmula, actualmente muy conocida, en donde se produce un notable desfile de impares que concluye en una expresión para π:

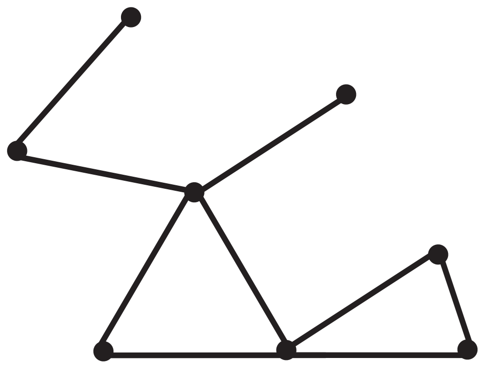
$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \ldots = \pi/4$$

el número de regiones (incluida la región exterior), también llamadas *caras*. En el ejemplo previo, se tiene:



V = 4
C = 4
A = 6
4 + 4 - 6 = 2

Aunque la fórmula vale para cualquier grafo plano, no necesariamente completo:



V = 8
C = 3
A = 9
8 + 3 - 9 = 2

Por otra parte, siempre se cumple que cada región está bordeada como mínimo por tres lados; de esta forma el número de aristas "en bruto" (es decir, sin contar las repeticiones) es mayor o igual que el triple de C. Pero, además, toda arista participa a lo sumo del borde de dos regiones, de modo que en nuestra cuenta "bruta" cada una de ellas fue contada dos veces. En consecuencia, en todo grafo plano vale la relación

$$3C \leq 2A$$

En particular, si existiera alguna manera de unir entre sí cinco puntos mediante líneas que no se cruzan, tendríamos un grafo plano con cinco vértices (a, b, c, d, e). Además, un rápido conteo nos indica que en ese caso el número de aristas debe ser 10, pues tienen que producirse todas las uniones posibles:

a con *b*	*a* con *c*	*a* con *d*	*a* con *e*
	b con *c*	*b* con *d*	*b* con *e*
		c con *d*	*c* con *e*
			d con *e*

Por la fórmula de Euler deducimos que

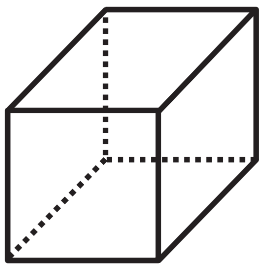
$$5 + C - 10 = 2$$
$$C = 2 + 10 - 5 = 7$$

Además, de la relación $3C \leq 2A$ se obtiene:

$$3.7 \leq 2.10$$
$$21 \leq 20,$$

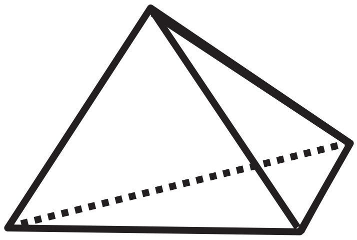
lo que es absurdo. Esta contradicción demuestra que no existe un grafo plano de cinco vértices conectados dos a dos.

Comentario: la fórmula de Euler (a menudo llamada de Euler-Descartes) vale también para los *poliedros convexos*, como por ejemplo el cubo:



V = 8
C = 6
A = 12
8 + 6 - 12 = 2

En particular, dicha relación ofrece una excelente manera de probar un notable hecho de la geometría, conocido ya por los griegos: existen cinco (y solamente cinco) poliedros regulares, vale decir, cuyas caras son polígonos regulares iguales. Son los denominados *cuerpos platónicos*, el más simple de los cuales es el tetraedro; se trata del mismo objeto que menciona Lacan en el Seminario XIX *...o peor*, cuando habla del triángulo de Pascal y las mónadas, díadas, tríadas, tétradas, etc.



4 vértices (mónadas)
6 aristas (díadas)
4 caras (tríadas)
4 + 4 - 6 = 2

No deja de ser interesante que un teorema tan profundamente geométrico pueda demostrarse apelando a argumentos topológicos. En efecto, si d es el número de aristas concurrentes en cada vértice, y n es el número de lados que tiene cada cara del poliedro, entonces es fácil verificar que:

$$d.V = 2.A = n.C$$

A partir de allí, mediante la fórmula de Euler se comprueba que sólo pueden darse los siguientes casos:

d	*N*	*C*	*A*	*V*	
3	3	4	6	4	*tetraedro*
3	4	6	12	8	*cubo*
3	5	12	30	20	*dodecaedro*
4	3	8	12	6	*octaedro*
5	3	20	30	12	*icosaedro*

Volviendo a los grafos completos, notemos también que el número de 10 aristas que hemos contabilizado para K_5 obedece a una ley general, a la que Lacan también se refiere en el Seminario XIX, en las secciones "pascalianas". La pregunta es: ¿cuántas aristas tiene K_n? No es difícil observar que, al igual que para el caso $n = 5$, esto equivale a encontrar el valor de la suma

$$1 + 2 + 3 + ... + n - 1$$

A_{ij}= artista que conecta V_i con V_j
(V_1 V_n vértices)

1) A_{12}
2) A_{13} A_{23}
3) A_{14} A_{24} A_{34}
4) A_{1n} A_{2n} A_{3n} .... A_{n-1n}

n-1) 1+2+3+ .... + (n-1)

Tal es la razón por la cual estos números se denominan *triangulares*; en el seminario mencionado aparece una fórmula precisa que dice cómo calcularlos: $n.(n-1)/2$. Por ejemplo, para $n = 5$ se verifica que 5.4/2 = 10, que es el número que obtuvimos contando *caso por caso*. En particular, esto permite responder a la siguiente pregunta, casi obligada en cualquier cena concurrida: en un brindis de n personas, ¿cuál es el número total de choques de copas?[6]

Vemos así que la topología (en particular, la teoría de grafos) es capaz de prestarnos auxilio en los campos más variados, desde la confección de circuitos turísticos sobre el Pregel hasta la organización logística de un brindis. Aunque ya hemos mencionado en el prefacio que se ocupa también de "botellas", así que esta última aplicación no debería sorprendernos... Como sea, el problema no cambia mucho si reemplazamos a las copas por manos para seguir chocándolas, pensando ahora en el uso que tiene tal verbo en la expresión "Choque esos cinco". Esto permite presentar un contexto mucho más apropiado para enunciar el denominado *handshake principle*:

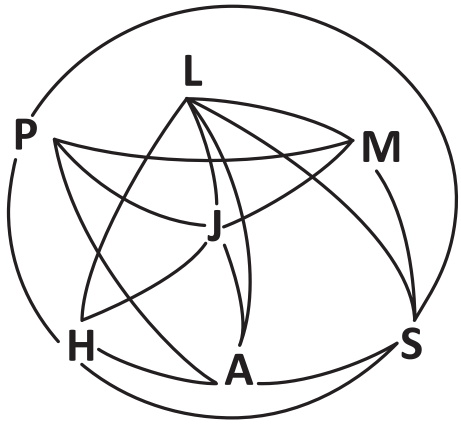
6. Se cuenta que el origen histórico de tan chocante costumbre tuvo lugar durante la celebración de un *Seder de Pesaj* que más tarde se hizo conocido bajo el nombre de *La Ultima Cena*. Entonces, si aplicamos la fórmula anterior para $n = 13$ podremos saber cuántas veces se han chocado las copas en tan trascendental evento: 13.12/2 = 78. Cabe imaginar, de todas formas, que no se trató de un "brindis completo": bien puede haber ocurrido que alguno de los apóstoles (en particular Judas, siempre tan díscolo) se haya mostrado reticente a chocar su copa con uno o más de sus condiscípulos. Siempre con ánimo matemático, vale la pena mencionar también que la palabra *Seder* significa "orden", mientras que *Pesaj* (en inglés se dice *Passover*) proviene de "saltear".

> En un grupo de personas, algunas de ellas se saludan entre sí dándose la mano. Entonces el número de personas que dieron la mano un número impar de veces debe ser par.

Por ejemplo, supongamos que Pedro y Liliana llegan a una reunión en la que se encuentran Marcos, Horacio y Ana. Como se trata de gente educada (y formal), dan un apretón de mano a cada uno de los presentes. Más tarde llegan Susana y Jorge, y el ritual se repite. Contemos los apretones:

	P	L	M	H	A	S	J
P			🤝	🤝	🤝	🤝	🤝
L			🤝	🤝	🤝	🤝	🤝
M	🤝	🤝				🤝	🤝
H	🤝	🤝				🤝	🤝
A	🤝	🤝				🤝	🤝
S	🤝	🤝	🤝	🤝	🤝		
J	🤝	🤝	🤝	🤝	🤝		

De esta forma, en la reunión hay cuatro *odds*: Pedro, Liliana, Susana y Jorge, que saludan a cinco personas cada uno. Es claro que la situación se puede representar por medio de un grafo, con siete vértices (P, L, M, H, A, S, J) conectados por aristas que indican “apretones de mano”.



Por tal motivo, el *handshake principle* se traduce a la teoría de grafos de la siguiente forma:

> En todo grafo el número de vértices de orden impar debe ser par.

Esta propiedad se explica fácilmente: dado un grafo cualquiera, se define el orden o grado de un vértice (denotado *deg*, por *degree*) como el número de aristas que lo tienen como extremo. Por ejemplo, en el grafo de siete vértices que representa la situación anterior se tiene[7]:

$$deg(P) = deg(L) = deg(S) = deg(J) = 5$$
$$deg(M) = deg(H) = deg(A) = 4$$

El handshake principle es consecuencia inmediata de la siguiente propiedad, cuya demostración es muy sencilla:

> En todo grafo, la suma de los órdenes de todos los vértices es igual al doble del número total de aristas.

Volviendo al tema, ¿cuál es el sentido de estas divagaciones? Por más respetuosos que sean a la hora de saludar a sus pacientes, o dispuestos que se muestren a sumarse a un brindis, el número de apretones de mano o choques de copas no es algo que debería interesar especialmente a los analistas. Sin embargo, es oportuno recordar la advertencia de Lacan:

> Todo esto no se los aporto sino como una suerte de proposición de ejercicios, de ejercicios mentales, de ejercicios con los cuales ustedes deben familiarizarse si quieren encontrar a continuación en el toro el valor metafórico que le daré cuando vaya en cada caso, se trate del obsesivo, del histérico, del perverso, hasta incluso del esquizofrénico a articular la relación del deseo y la demanda.

En suma, podemos pensar a los párrafos anteriores como una suerte de "ejercicio mental" para introducirnos, poco a poco, en la topología.

---

7. Dicho sea de paso, se trata de un grafo no completo, pues de serlo el orden de cada vértice debería ser el máximo posible, es decir: 6. Podemos también preguntarnos: ¿es un grafo plano?

Para concluir esta sección, vale la pena mencionar también aquel párrafo del Seminario IX en donde Lacan dice:

> Metáfora intuitiva, pongamos geométrica. Cada uno sabe la importancia que en toda la batalla entre matemáticos no hace estragos sino en torno a elementos de esta especie. Poincaré y otros sostienen que hay un elemento intuitivo irreductible, y toda la escuela de los axiomáticos pretende que podamos formalizar enteramente a partir de axiomas, de definiciones y de elementos, todo el desarrollo de las matemáticas, es decir, arrancarla a toda intuición topológica. Felizmente Poincaré percibe que la topología, ahí se encuentra la esencia del elemento intuitivo, y que no se puede resolver, y diría aun más: por fuera de la intuición no se puede hacer esta ciencia llamada topología, no se la puede comenzar a articular porque es una gran ciencia.

La alusión a Poincaré, la intuición y aquella corriente filosófica conocida como *intuicionismo* hace que merezca la pena traer una cita del matemático francés:

> ...es para favorecer tal intuición que el geómetra tiene la necesidad de dibujar figuras o, por lo menos, representárselas mentalmente. Ahora bien, si desprecia las propiedades métricas o proyectivas de estas figuras, si sólo se atiene a sus propiedades puramente cualitativas, solamente entonces la intuición geométrica interviene verdaderamente.

De algún modo, resulta notable que alguien haya podido encontrar el verdadero papel de la intuición geométrica precisamente allí, en aquella ciencia que se desentiende de la medida.

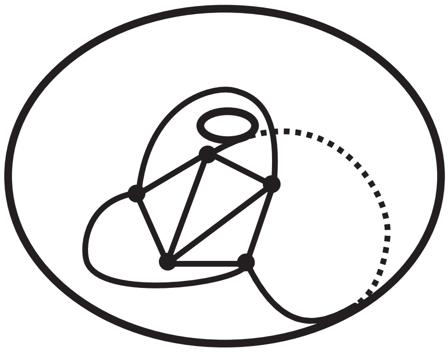
La calidad es lo que importa

En las páginas precedentes hemos dicho, informalmente, que la topología se relaciona con el estudio de las propiedades cualitativas de las figuras. Es hora de comenzar a dotar a este comentario de mayor precisión. El siguiente párrafo del Seminario IX será de utilidad para introducirnos en el asunto:

> Lo que es seguro es que aparentemente es esencial; ahora que está allí ustedes pueden desinflar vuestro toro, como un globo, y guardarlo

> en vuestro bolsillo, ya que no pertenece a la naturaleza de este toro ser siempre perfectamente redondo, perfectamente igual; lo que es importante es esta estructura agujereada. Ustedes lo pueden volver a inflar cuando tengan necesidad de hacerlo, pero puede como la pequeña jirafa de Juanito que hacía un nudo con su cuello...

Parece claro; hay propiedades geométricas que no "pertenecen a la naturaleza" del toro. Al menos, no en forma tan concluyente como la presencia de un agujero, que nos habla de algo esencial. Ahora bien, ¿qué es la esencia? En el ejemplo de los cinco puntos hemos dado, acaso sin notarlo, con una propiedad que muestra algún aspecto de la esencia del plano. Sin importar las complejidades de su geometría, podemos decir que pertenece a la naturaleza del plano la propiedad de no poderse trazar en él un grafo completo de cinco vértices. Cualquiera es capaz de comprobar que eso no ocurre en el toro, en donde efectivamente es posible encontrar "atajos" que eviten la superposición de líneas[8].



Un grafo tórico

Esto nos muestra ya que el toro es un objeto esencialmente distinto de un plano. Y también de una esfera. Por cierto, hay muchas diferencias más...

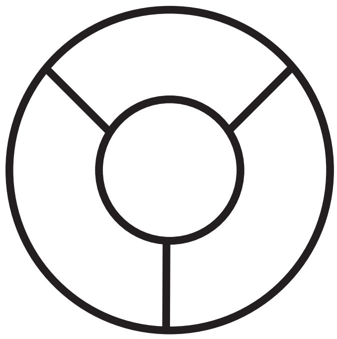
Otra propiedad curiosa es la del *número cromático*, al que Lacan se refiere de la siguiente forma:

> Hay grandes primeras verdades ligadas en torno a esta construcción del toro y les voy a hacer evidenciar algo: sobre una esfera o sobre un

8. En rigor, en el toro puede situarse hasta un máximo de 7 puntos. Esto no es inmediato, pero se verifica, con un poco de paciencia.

plano, ustedes saben que se puede dibujar cualquier mapa, por complicado que sea, denominado geográfico, y que bastan cuatro colores para colorear sus territorios de manera tal que impida confundir a ninguno con su vecino. Si ustedes encuentran una buena demostración de esta verdad verdaderamente primera, podrán aportarla a quien corresponda porque se les otorgará un premio, no habiendo sido hallada aún al día de hoy la demostración.

Esto es cierto; mejor dicho, lo era en el momento en que la frase fue proferida. El asunto es el siguiente: dada una superficie cualquiera, su número cromático se define como el mínimo número de colores que bastan para colorear cualquier mapa sobre ella, de modo tal que dos países limítrofes tengan siempre colores distintos. En el caso del plano, es fácil ver que con tres colores no alcanza, pues por ejemplo tenemos el siguiente mapa, en el que cada una de las regiones limita con las otras tres:



A fines del siglo XIX se demostró que con cinco colores es siempre suficiente; demandó cierto esfuerzo, pero se logró. Entonces surge naturalmente la duda: ¿alcanzará también con cuatro?

Y aquí iban a hacer falta esfuerzos mucho mayores, hasta un punto tal que la pregunta todavía no había encontrado respuesta en 1962, que fue cuando Lacan la planteó ante su audiencia. El resultado, actualmente llamado *teorema de los cuatro colores*, permaneció irresuelto por cerca de un siglo desde su formulación hasta 1976, año en que por fin se logró dar una demostración completa. Con todo, incluso hoy se puede asegurar que si alguien encuentra una "buena demostración" pasará seguramente a la historia; la razón es que la parte más sustancial de la prueba de 1976, llevada a cabo por K. Appel y W. Haken, fue efectuada con ayuda de una computadora. La computadora redujo todo a un cierto número de casos, un número inmenso de casos, y los analizó uno por uno. No se conoce por el momento una demostración analítica.

Los más escépticos llegan a desconfiar de la validez de la demostración (¿por qué deberíamos creerle a una computadora?); sin llegar a tanto, no es aventurado afirmar que la mayoría de los matemáticos no la ve con muy buenos ojos. De todas maneras, es un hecho aceptado que el número cromático del plano (y de la esfera) es 4. En el toro la situación es distinta, pues se ha obtenido una demostración matemáticamente irreprochable de que su número cromático es 7. Algo de eso menciona Lacan:

> En el toro, no es experimentalmente que lo verán ustedes, pero se demuestra: para resolver el mismo problema, son necesarios siete colores, dicho de otro modo, sobre el toro ustedes pueden con la punta de un lápiz definir hasta siete dominios, pero ninguno más, siendo definido cada uno como teniendo una frontera común con los otros. Lo que es decirles que si tienen un poco de imaginación, ustedes dibujarán esos territorios hexagonalmente, para verlos con claridad.[9]

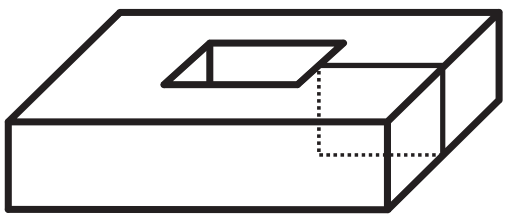
Ese 7 pertenece, pues, a la esencia del toro. Nuevamente, hablamos de la esencia topológica, aquella que Poincaré describiera mediante la metáfora del dibujante, mencionada en la introducción:

> Supongamos un modelo cualquiera y la copia de este modelo realizada por un dibujante poco diestro; las proporciones están alteradas, las rectas, trazadas por una mano temblorosa, han sufrido importantes desviaciones y presentan curvaturas malhadadas. Desde el punto de vista de la geometría métrica, y aun desde el de la geometría proyectiva, las dos figuras no son equivalentes; por el contrario, lo son, desde el punto de vista del Analysis Situs [...] Él altera las proporciones más o menos groseramente, sus líneas rectas tienen zigzags inquietantes, sus círculos presentan protuberancias faltas de gracia. Todo ésto no tiene importancia: no perturbará en lo más mínimo al geómetra, ni le impedirá razonar bien. Pero lo que no debe ocurrir, es que el artista inexperto represente una curva ce-

9. El lector puede hacer el intento de abordar el ejercicio propuesto por Lacan, aunque si aguarda al próximo capítulo podrá contar con algunas herramientas que le servirán para facilitar la tarea.

> rrada por medio de una curva abierta, tres líneas que se cortan en un punto por medio de tres líneas que no tengan ningún punto común, una superficie con abertura por medio de una superficie sin abertura. En tal caso no se podría utilizar más su figura, y el razonamiento se haría imposible. La intuición no habría sido obstaculizada por los defectos de dibujo que sólo interesarían a la geometría métrica o a la proyectiva; ambas se harán imposibles ya que estos defectos tienen que ver con el Analysis Situs.

Para entender mejor este asunto de la "esencia", podemos imaginar que llevamos a cabo un sencillo experimento: le mostramos un toro a una persona, y le pedimos que nos describa sus rasgos distintivos[10]. En otras palabras, le pedimos que efectúe una suerte de *identi-kit*, como si en vez de un inocente toro se tratase de un rufián de la peor calaña. No se trata de un pedido de los más frecuentes pero, una vez superada la sorpresa inicial, nuestro entrevistado seguramente mencionará en primer lugar cuestiones ligadas a las dimensiones, curvatura, simetría, etc. Sin embargo, hay una propiedad que se destaca entre todas de forma tal que raramente faltará a cualquier descripción: si hay algo que el toro sin duda tiene, es un agujero. La observación es trivial, pero pone en juego el aspecto fundamental de esta rama de la matemática que intentamos explicar. Notemos que dicha propiedad no es métrica; no depende de la noción de distancia. Hemos dicho ya que la topología es una geometría "no métrica"; una geometría cualitativa, en oposición a otras ramas como la geometría clásica o la proyectiva. En ella un toro es equivalente a esta otra figura, geométricamente muy distinta:

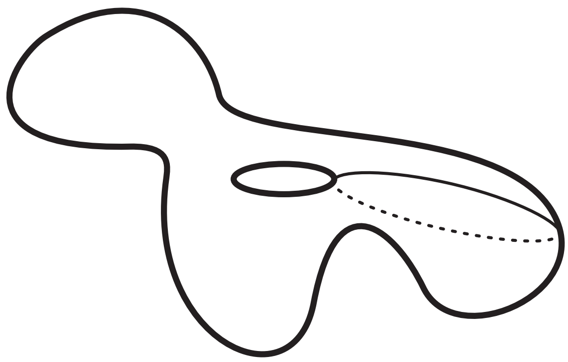


Lo que intentamos precisar es la noción de "equivalencia topológica", que dice que dos figuras son equivalentes cuando es

10. Esto es diferente del experimento de mostrarle una persona a un toro, que suena mucho más arriesgado.

posible transformar a una en la otra mediante una deformación, que no implique cortes o desgarraduras.

Las propiedades que una figura preserva cuando se le aplica cualquiera de estas deformaciones se denominan *invariantes topológicos*; por ejemplo, no importa cómo deformemos a un toro, siempre seguirá teniendo su agujero[11].

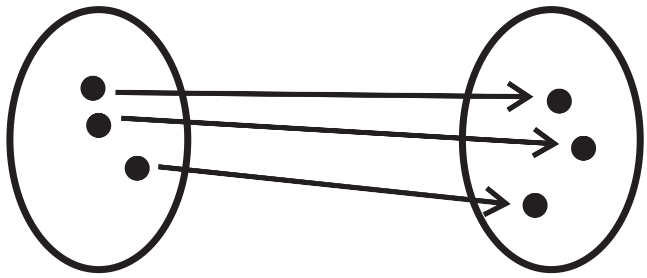


Un toro deformado

La propiedad de "tener un agujero" es, en consecuencia, un invariante topológico. Existe una infinidad de tales invariantes; algunos de ellos nos serán de utilidad en las próximas secciones.

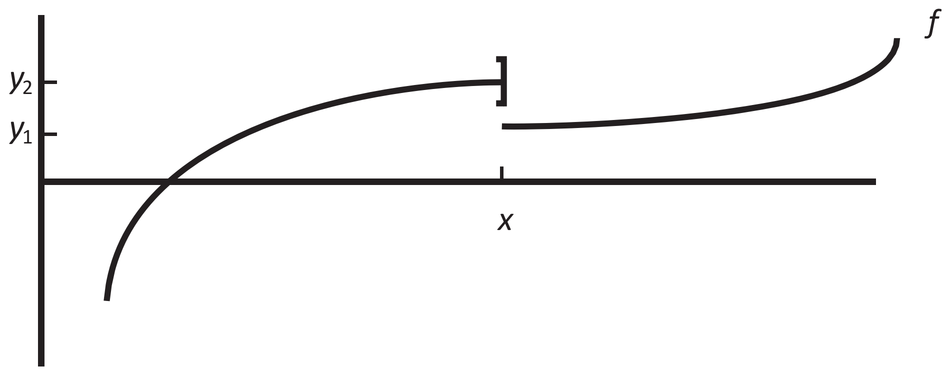
Vamos a definir con un poco más de rigor lo que significa "ser equivalente". El concepto matemático que subyace a esta idea es el de *homeomorfismo*; se trata de una correspondencia que goza de las propiedades de ser *biunívoca* y *bicontinua*. La primera de ellas no es cuestión topológica sino de la teoría de conjuntos: una función es biunívoca o biyectiva cuando es "uno a uno". Esto equivale a decir:

> A cada elemento del primer conjunto corresponde uno del segundo, y viceversa.



11. En algún sentido, podemos pensar que tiene dos… aunque ese es un aspecto del que nos ocuparemos más adelante.

La segunda propiedad se refiere a la *continuidad*, y obedece a la idea intuitiva antes mencionada de “deformación”, sin desgarraduras. En un curso elemental de análisis matemático se suele decir, para comenzar a comprender un concepto tan delicado, que una función es discontinua cuando su gráfica presenta algún salto. La imagen no es del todo correcta, aunque al menos resulta fácil de “ver”:



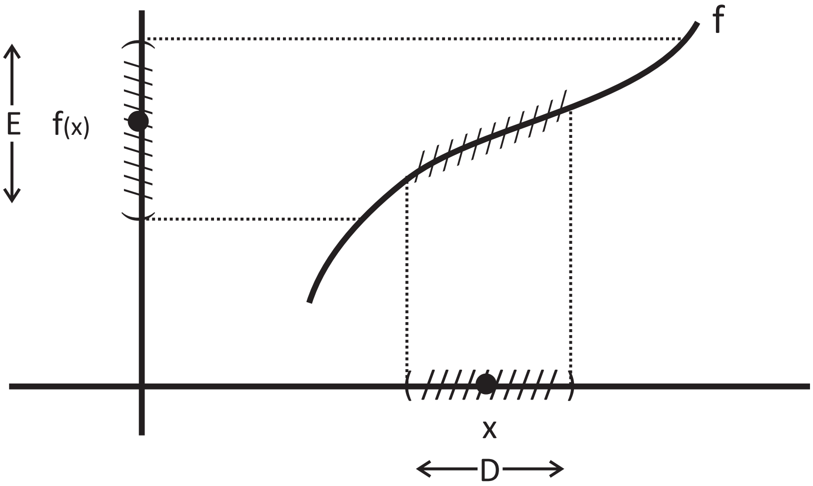
Función discontinua en x

La definición de continuidad surge entonces por contraposición a esta idea: basta con entender cuál la exacta naturaleza del “salto” que la función presenta en el punto x. Hay una noción que acude en nuestra ayuda, cuya utilización informal es históricamente muy anterior a la topología: la noción de *límite*. En el ejemplo anterior se ve que la función no tiene límite en x; vale decir, los valores que toma no se acercan a ningún número. En efecto, para puntos cercanos a x situados a su derecha la función se acerca a y_1, mientras que para valores cercanos a x situados a su izquierda, la función se acerca a y_2. Luego, siendo y_1 distinto a y_2, concluimos que el límite no existe[12].

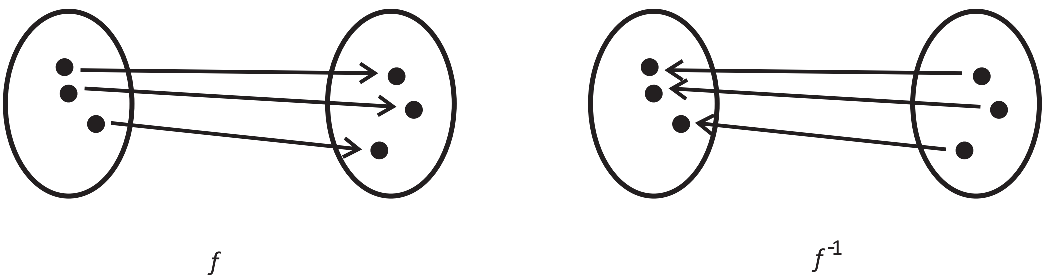
Un poco más en general, se dice que una función cualquiera f es continua en x si para valores cada vez más cercanos a x la función toma valores cada vez más cercanos a $f(x)$. Ahora bien: ¿qué significa “más cercano”? Hemos dicho que la topología prescinde de la métrica, de modo que debemos pensar en alguna idea que reemplace a la de “acercarse”, y que no esté basada en la distan-

12. El corchete] en el gráfico indica que el valor de la función en x se calcula en este caso sobre de la rama de la izquierda, es decir, y_2. Sin embargo, la existencia o no del límite en un punto es independiente del valor de la función en dicho punto.

cia. La respuesta precisa viene dada por un concepto básico de la topología, el de *conjunto abierto*, que veremos un poco más adelante. Por el momento, es suficiente con observar que si tomamos cualquier segmento E centrado en $f(x)$, existe un segmento D centrado en x tal que al aplicar la función a cualquier punto de D, se obtiene un valor que pertenece a E.



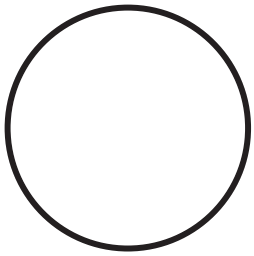
Para completar la noción de homeomorfismo, observemos que cuando una función f es biunívoca (uno a uno), existe la llamada *función inversa*, denotada f^{-1}, que justamente invierte el sentido de las flechas:



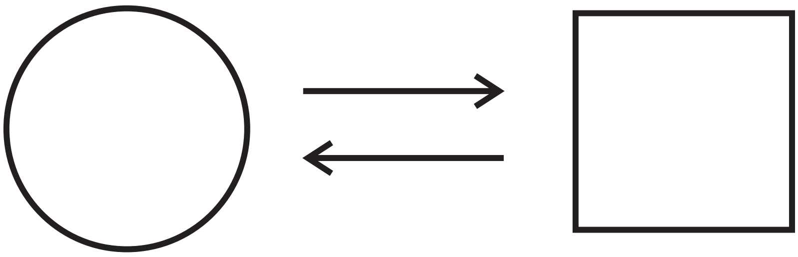
f f^{-1}

Si tanto f como su inversa f^{-1} son funciones continuas, se dice que f es bicontinua; en tal caso f es un homeomorfismo. Este simple concepto es el que permite asir en su esencia no sólo al toro, sino a cualquiera de los objetos topológicos mencionados por Lacan. Dos espacios topológicos son equivalentes cuando entre ellos se puede definir un homeomorfismo; desde un punto de vista intuitivo, esto quiere decir que se puede deformar a cualquiera de ellos para obtener al otro. Esta flexible razón es la que ha provocado el hecho de que la topología sea denominada, informalmente, *geometría del caucho*.

Para comprenderlo mejor, tomemos por ejemplo a la circunferencia:



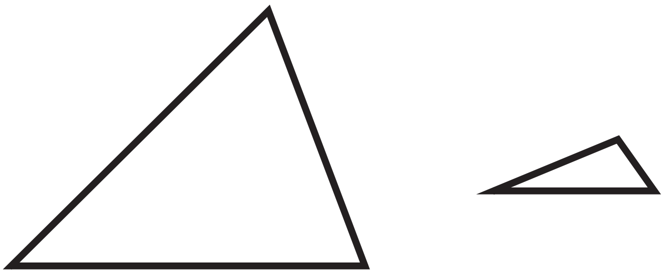
Este objeto es topológicamente equivalente a un cuadrado, por más que para la geometría usual se trate de cosas bien distintas. La circunferencia se deforma de modo tal que es posible ir y volver, como si estuviera hecha de caucho:



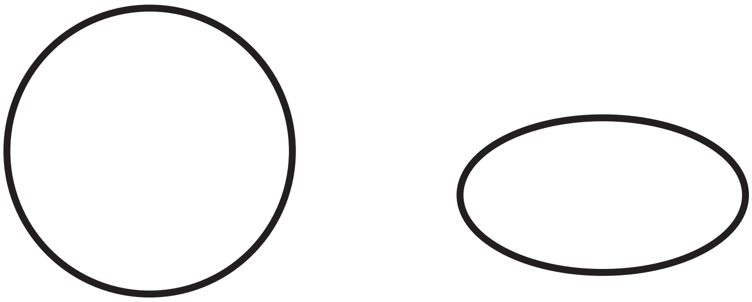
A diferencia de la geometría usual, que sólo permite efectuar rotaciones y traslaciones (movimientos rígidos); la topología autoriza una clase de transformaciones más amplia.

Siguiendo a Poincaré, hemos situado también una especie de "punto intermedio" entre la geometría clásica y la topología: la geometría proyectiva, que se desentiende de algunas cuestiones métricas, pero no de todas. La geometría proyectiva estudia las propiedades que las figuras conservan cuando se aplican transformaciones proyectivas: intuitivamente, se trata de la noción de *perspectiva*.

Sin embargo, algunos aspectos de la métrica prevalecen, pues un triángulo visto en perspectiva sigue siendo un triángulo, por más que sus dimensiones o sus ángulos cambien.



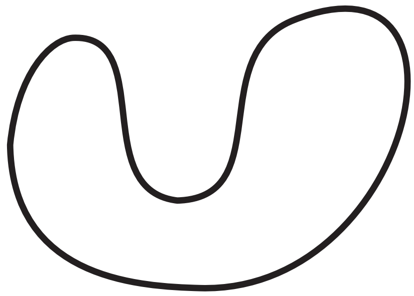
De la misma manera, una circunferencia puede transformarse en una elipse[13]:



Pero un círculo jamás se va a transformar en un triángulo, por más generosas que sean nuestras perspectivas. Por eso, en la geometría proyectiva se conservan algunas propiedades métricas. La topología brinda mayor libertad: con tal de que no haya cortes, uno está autorizado a deformar los objetos a gusto.

Estas ideas remiten a una interesante cuestión: la identidad pensada como *invariancia*. En el célebre programa de Erlangen de 1882, el matemático Félix Klein dijo que una geometría consiste en el conjunto de propiedades que resultan invariantes bajo determinado grupo de transformaciones. Un poco más adelante veremos qué significa "grupo", aunque ya podemos anticipar que si el grupo de transformaciones es el de los movimientos rígidos, obtenemos la geometría común. Las propiedades proyectivas son aquellas que se preservan cuando se aplican movimientos de otro grupo, el de las transformaciones proyectivas. Y la topología está dada por un grupo todavía más general, el de los homeomorfismos. Esto permite decir, sin temor, que por ejemplo esto es una circunferencia:

13. En realidad, la circunferencia es proyectivamente equivalente también a una parábola y a una hipérbola, aunque esto es algo más difícil de entender.



En general, se llama "circunferencia" a cualquier curva cerrada simple, es decir: sin auto-intersecciones. Y esta definición es suficiente para dar cuenta de sus propiedades topológicas[14].

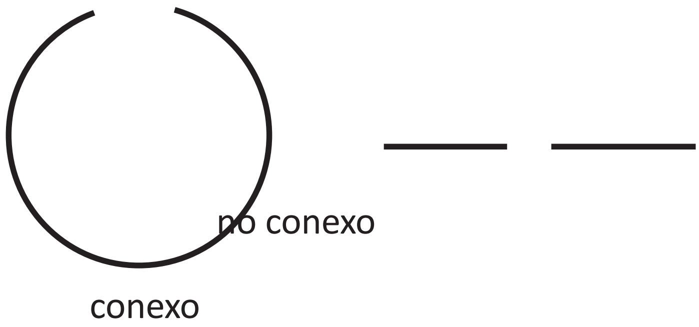
En esta suerte de "identidad negativa", quizás no resulta ya tan claro cuándo dos objetos *no son* equivalentes. Si todo se deforma; ¿cómo estar seguros, por ejemplo, de que una circunferencia no es lo mismo que un segmento?

Para resolver este tipo de cuestiones, vienen en nuestra ayuda aquellas propiedades que ya hemos mencionado, los invariantes. Entre otras cosas, tienen una utilidad muy específica: señalar diferencias. Para el sencillo caso del problema anterior, verificar que una circunferencia no es lo mismo que un segmento, debemos dejar de lado los prejuicios geométricos y empezar a trabajar con cierta intuición topológica. La diferencia no "salta a la vista" con sólo observar que una figura se curva y la otra no; debemos buscar algún invariante topológico que realmente permita garantizar que no existe un homeomorfismo entre ambas. Vale la pena mencionar que entre el segmento y la circunferencia existen correspondencias biunívocas; lo que no existe es una correspondencia que además sea bicontinua. El asunto es bastante sutil; por ejemplo, las figuras sí serían equivalentes en caso de que a la circunferencia le sacáramos primero un punto.[15] Pero esta observación nos permite pensar por ejemplo en la *conexión*.

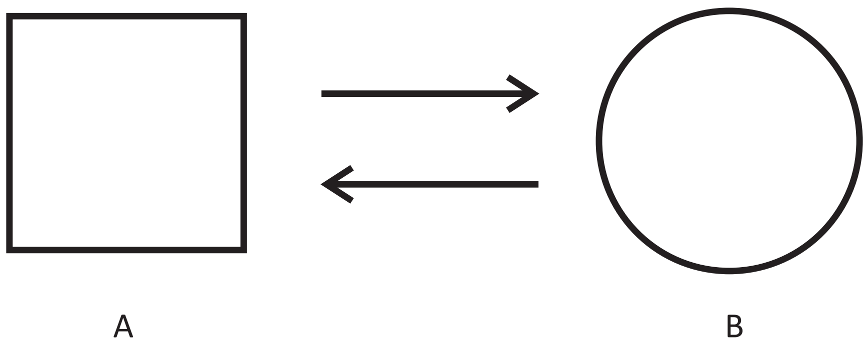
14. Un importante resultado asegura que toda curva cerrada continua trazada sobre un plano tiene la propiedad de dividirlo en dos regiones, una acotada y otra no acotada. Esto que parece una sencillez, en realidad es un teorema famoso y de complicada demostración, el *teorema de Jordan*. Vale para cualquier curva cerrada simple, no importa cómo sea el dibujo; la propiedad no depende de la métrica.

15. Más precisamente, puede verse que una circunferencia sin un punto es equivalente a un segmento "abierto", es decir, que no contiene a sus extremos. La construcción es sencilla; Lacan la emplea muy a menudo; por ejemplo en sus desarrollos sobre los nudos, cuando hace equivaler la circunferencia a la recta infinita

Una circunferencia a la que sacamos un punto cualquiera sigue siendo un conjunto conexo; en un segmento esto no ocurre, lo que indica que las figuras no pueden ser equivalentes:

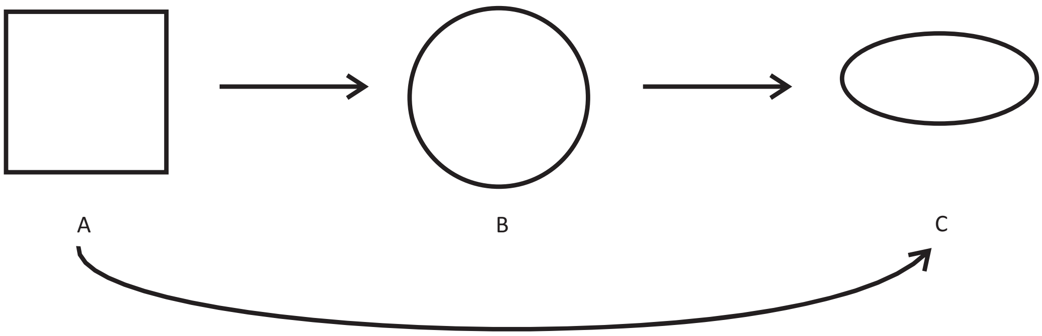


Vale la pena aclarar que esta identidad topológica responde a lo que es una equivalencia en términos lógicos. Por empezar, si podemos decir que hay un homeomorfismo entre un cuadrado y una circunferencia, es porque existe un "ida y vuelta"; eso nos da cierta noción de simetría. Si A es equivalente a B, entonces B es equivalente a A.



Otra propiedad es la *reflexividad*, que en este caso es prácticamente trivial. Se parece al famoso poema de Gertrude Stein, aunque no vale sólo para las rosas: cualquier objeto es equivalente a sí mismo. El homeomorfismo que nos permite efectuar esta tonta observación es la llamada función identidad, una operación tan sencilla que consiste en no mover nada.

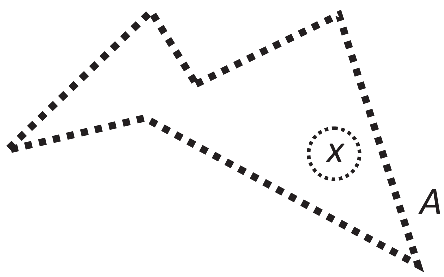
Y la tercera propiedad es la transitividad: si un cuadrado es equivalente a una circunferencia, y una circunferencia a una elipse, entonces la transitividad permite asegurar que el cuadrado es equivalente a la elipse. Si A y B son homeomorfos y también lo son B y C, entonces debe existir un homeomorfismo entre A y C.



Si A≃B y B≃C, entonces A≃C

Para concluir esta primera parte, vamos a precisar un poco más la noción de topología como teoría matemática. Al respecto, cabe decir que se basa en una única idea primitiva, que es la de *conjunto abierto*; eso es suficiente para definir el concepto de continuidad.

En la topología usual, es fácil pensar la noción de abierto a partir del concepto de *entorno*: un conjunto A es entorno de un punto x si existe alguna "bola" centrada en x enteramente contenida en A. En tal situación, se dice también que x es un punto interior de A.



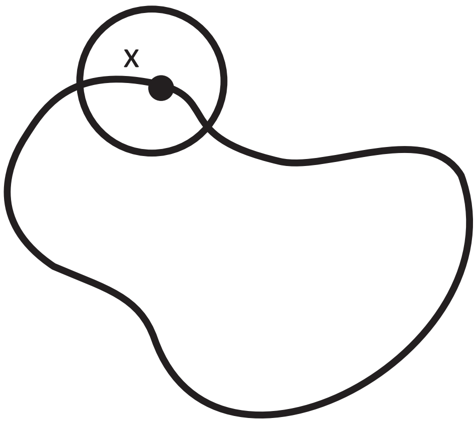
La definición de "bola" es la esperable: una bola (abierta) de radio r centrada en x es el conjunto de todos los puntos que se encuentran a distancia menor que r de x. Esto no deja de ser una definición métrica, pues apela a la distancia, aunque resulta eficaz; siempre hay tiempo para encontrar otras definiciones equivalentes que no hablen de bolas y radios.

Pero lo más importante es que la noción de entorno permite definir al conjunto abierto, simplemente, como aquel que es entorno de todos sus puntos. En otras palabras, A es abierto si todos sus puntos son interiores. Es fácil ver que se cumplen las siguientes propiedades:

1. El vacío es abierto, así como todo el espacio.
2. Si A y B son abiertos, también lo es su intersección.
3. Dada una familia cualquiera de conjuntos abiertos, la unión de todos ellos es un abierto.

La nociones de entorno y punto interior permiten definir algunas otras cuestiones útiles. Por un lado, un punto x que pertenece a A pero no es interior, se denomina *punto frontera*. Pero puede haber otros puntos frontera que estén fuera de A: intuitivamente, se trata de puntos que están "pegados" al conjunto, aunque no dentro de él: cualquier bola centrada en ellos contiene elementos de A y también elementos fuera de A.

Por eso, la definición en realidad es más precisa: se denomina punto frontera de un conjunto A a todo punto que no es interior a A y tampoco es interior al complemento de A. Dicho de otra forma, no está enteramente dentro de A ni tampoco enteramente afuera. El conjunto de puntos frontera se llama *frontera de A*.



Punto Frontera

El paso siguiente, mucho más abstracto, consiste en decir que una topología para un conjunto X consiste en cualquier familia de subconjuntos de X (llamados "abiertos") que satisfaga las propiedades 1), 2) y 3). Esto ya no depende en absoluto del hecho de que exista una métrica. El conjunto X provisto de una familia con tales propiedades se denomina *espacio topológico*.

Finalmente, mencionemos que un homeomorfismo entre dos espacios X e Y es una función biyectiva $f:X \to Y$ que preserva la estructura topológica: los abiertos de X se transforman en abiertos de Y, y viceversa.